Sucessões reais

2009/10

Definição

Chama-se **sucessão** a uma aplicação de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$.

Definição

O contradomínio de uma sucessão é designado por **conjunto dos termos da sucessão** e representa-se por $\{u_n\}_{\{n\in\mathbb{N}\}}$.

Mais simplemente, denotamos a sucessão por u_n ou (u_n).

Definição

Uma sucessão diz-se **limitada** quando o seu contradomínio (o conjunto dos seus termos) é um conjunto limitado de $\mathbb{R}$, isto é,

$$\exists M \in \mathbb{R} : \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq M \,.$$

Nota: Existem sucessões que são apenas **limitadas inferiormente** ou **superiormente**.

Definição

Uma sucessão diz-se **crescente** se e só se, para todo o $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \leq u_{n+1} .$$

Equivalentemente, $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

Definição

De modo semelhante, define-se sucessão **decrescente** aquela que verifica

$$u_n \geq u_{n+1} \, ,$$

para $n \in \mathbb{N}$. Equivalentemente, $u_n - u_{n+1} \geq 0$.

Definição

Uma sucessão crescente ou decrescente diz-se **monótona**.

Definição

De modo semelhante, define-se sucessão **decrescente** aquela que verifica

$$u_n \geq u_{n+1} \,,$$

para $n \in \mathbb{N}$. Equivalentemente, $u_n - u_{n+1} \geq 0\,.$

Definição

Uma sucessão crescente ou decrescente diz-se **monótona**.

Definição

Uma sucessão diz-se convergente quando verifica a seguinte propriedade:

$$\exists L \in \mathbb{R} : \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists p \in \mathbb{N} : \quad n > p \Rightarrow |u_n - L| < \epsilon$$

Esceve-se $\lim u_n = L$ ou $u_n \to L$

Teorema

Uma sucessão convergente u_n possui um único limite.

Teorema

Uma sucessão convergente u_n é necessariamente limitada.

Nota: Uma sucessão limitada não tem que ser uma sucessão convergente.

Teorema

Uma sucessão convergente u_n é necessariamente limitada.

Nota: Uma sucessão limitada não tem que ser uma sucessão convergente.

Teorema

Uma sucessão monótona e limitada u_n é uma sucessão convergente.

Teorema

Sejam u_n *e* v_n *duas sucessões convergentes tais que, para um certo* $p_0 \in \mathbb{N}$

$$v_n \leq u_n \qquad \forall\, n > p_0\,.$$

Então,

$$\lim v_n \leq \lim u_n\,.$$

Teorema

Teorema das sucessões enquadradas

Sejam u_n, v_n, w_n *sucessões para as quais existe* $p_0 \in \mathbb{N}$

$$n > p_0 \quad \Rightarrow \quad v_n \leq u_n \leq w_n \,.$$

Se v_n *e* w_n *forem convergentes para o mesmo limite* a *então* u_n *é uma sucessão convergente para* a.

Definição

Um sucessão convergente para zero é designada por **infinitésimo**.

Teorema

Se $u_n \to 0$ e v_n é uma sucessão limitada então $u_n v_n \to 0$.

Definição

Um sucessão convergente para zero é designada por **infinitésimo**.

Teorema

Se $u_n \to 0$ *e* v_n *é uma sucessão limitada então* $u_n v_n \to 0$.

Teorema

Sejam u_n e v_n sucessões convergentes para a e b, respectivamente. Então:

(i) a sucessão $u_n + v_n$ é convergente para $a + b$;

(ii) sendo k um número real, ku_n é convergente para ka;

(iii) a sucessão $u_n v_n$ é convergente para ab;

(iv) se $b \neq 0$ e $v_n \neq 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$ então a sucessão $\dfrac{u_n}{v_n}$ converge para $\dfrac{a}{b}$;

(v) a sucessão $(u_n)^p$, com $p \in \mathbb{N}$, é convergente para a^p;

(vi) a sucessão $(u_n)^{1/p}$, com $p \in \mathbb{N}$ é convergente para $a^{1/p}$ (se p for par, $u_n \geq 0$);

(vii) se, para qualquer n, $u_n > 0$ e a e b não são ambos nulos, a sucessão $(u_n)^{v_n}$ converge para a^b;

(viii) a sucessão $|u_n|$ converge para $|a|$.

Teorema

Sejam u_n e v_n sucessões convergentes para a e b, respectivamente. Então:

(i) a sucessão $u_n + v_n$ é convergente para $a + b$;

(ii) sendo k um número real, ku_n é convergente para ka;

(iii) a sucessão $u_n v_n$ é convergente para ab;

(iv) se $b \neq 0$ e $v_n \neq 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$ então a sucessão $\dfrac{u_n}{v_n}$ converge para $\dfrac{a}{b}$;

(v) a sucessão $(u_n)^p$, com $p \in \mathbb{N}$, é convergente para a^p;

(vi) a sucessão $(u_n)^{1/p}$, com $p \in \mathbb{N}$ é convergente para $a^{1/p}$ (se p for par, $u_n \geq 0$);

(vii) se, para qualquer n, $u_n > 0$ e a e b não são ambos nulos, a sucessão $(u_n)^{v_n}$ converge para a^b;

(viii) a sucessão $|u_n|$ converge para $|a|$.

Teorema

Sejam u_n e v_n sucessões convergentes para a e b, respectivamente. Então:

(i) a sucessão $u_n + v_n$ é convergente para $a + b$;

(ii) sendo k um número real, ku_n é convergente para ka;

(iii) a sucessão $u_n v_n$ é convergente para ab;

(iv) se $b \neq 0$ e $v_n \neq 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$ então a sucessão $\dfrac{u_n}{v_n}$ converge para $\dfrac{a}{b}$;

(v) a sucessão $(u_n)^p$, com $p \in \mathbb{N}$, é convergente para a^p;

(vi) a sucessão $(u_n)^{1/p}$, com $p \in \mathbb{N}$ é convergente para $a^{1/p}$ (se p for par, $u_n \geq 0$);

(vii) se, para qualquer n, $u_n > 0$ e a e b não são ambos nulos, a sucessão $(u_n)^{v_n}$ converge para a^b;

(viii) a sucessão $|u_n|$ converge para $|a|$.

Teorema

Sejam u_n e v_n sucessões convergentes para a e b, respectivamente. Então:
(i) a sucessão $u_n + v_n$ é convergente para $a + b$;
(ii) sendo k um número real, ku_n é convergente para ka;
(iii) a sucessão $u_n v_n$ é convergente para ab;
(iv) se $b \neq 0$ e $v_n \neq 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$ então a sucessão $\dfrac{u_n}{v_n}$ converge para $\dfrac{a}{b}$;
(v) a sucessão $(u_n)^p$, com $p \in \mathbb{N}$, é convergente para a^p;
(vi) a sucessão $(u_n)^{1/p}$, com $p \in \mathbb{N}$ é convergente para $a^{1/p}$ (se p for par, $u_n \geq 0$);
(vii) se, para qualquer n, $u_n > 0$ e a e b não são ambos nulos, a sucessão $(u_n)^{v_n}$ converge para a^b;
(viii) a sucessão $|u_n|$ converge para $|a|$.

Teorema

Sejam u_n e v_n sucessões convergentes para a e b, respectivamente. Então:

(i) a sucessão $u_n + v_n$ é convergente para $a + b$;

(ii) sendo k um número real, ku_n é convergente para ka;

(iii) a sucessão $u_n v_n$ é convergente para ab;

(iv) se $b \neq 0$ e $v_n \neq 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$ então a sucessão $\frac{u_n}{v_n}$ converge para $\frac{a}{b}$;

(v) a sucessão $(u_n)^p$, com $p \in \mathbb{N}$, é convergente para a^p;

(vi) a sucessão $(u_n)^{1/p}$, com $p \in \mathbb{N}$ é convergente para $a^{1/p}$ (se p for par, $u_n \geq 0$);

(vii) se, para qualquer n, $u_n > 0$ e a e b não são ambos nulos, a sucessão $(u_n)^{v_n}$ converge para a^b;

(viii) a sucessão $|u_n|$ converge para $|a|$.

Teorema

Sejam u_n *e* v_n *sucessões convergentes para* a *e* b*, respectivamente. Então:*

(i) a sucessão $u_n + v_n$ *é convergente para* $a + b$*;*

(ii) sendo k *um número real,* ku_n *é convergente para* ka*;*

(iii) a sucessão $u_n v_n$ *é convergente para* ab*;*

(iv) se $b \neq 0$ *e* $v_n \neq 0$ *para todo o* $n \in \mathbb{N}$ *então a sucessão* $\dfrac{u_n}{v_n}$ *converge para* $\dfrac{a}{b}$*;*

(v) a sucessão $(u_n)^p$*, com* $p \in \mathbb{N}$*, é convergente para* a^p*;*

(vi) a sucessão $(u_n)^{1/p}$*, com* $p \in \mathbb{N}$ *é convergente para* $a^{1/p}$ *(se* p *for par,* $u_n \geq 0$*);*

(vii) se, para qualquer n*,* $u_n > 0$ *e* a *e* b *não são ambos nulos, a sucessão* $(u_n)^{v_n}$ *converge para* a^b*;*

(viii) a sucessão $|u_n|$ *converge para* $|a|$*.*

Teorema

Sejam u_n e v_n sucessões convergentes para a e b, respectivamente. Então:

(i) a sucessão $u_n + v_n$ é convergente para $a + b$;

(ii) sendo k um número real, ku_n é convergente para ka;

(iii) a sucessão $u_n v_n$ é convergente para ab;

(iv) se $b \neq 0$ e $v_n \neq 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$ então a sucessão $\dfrac{u_n}{v_n}$ converge para $\dfrac{a}{b}$;

(v) a sucessão $(u_n)^p$, com $p \in \mathbb{N}$, é convergente para a^p;

(vi) a sucessão $(u_n)^{1/p}$, com $p \in \mathbb{N}$ é convergente para $a^{1/p}$ (se p for par, $u_n \geq 0$);

(vii) se, para qualquer n, $u_n > 0$ e a e b não são ambos nulos, a sucessão $(u_n)^{v_n}$ converge para a^b;

(viii) a sucessão $|u_n|$ converge para $|a|$.

Teorema

Sejam u_n *e* v_n *sucessões convergentes para* a *e* b*, respectivamente. Então:*
(i) a sucessão $u_n + v_n$ *é convergente para* $a + b$*;*
(ii) sendo k *um número real,* ku_n *é convergente para* ka*;*
(iii) a sucessão $u_n v_n$ *é convergente para* ab*;*
(iv) se $b \neq 0$ *e* $v_n \neq 0$ *para todo o* $n \in \mathbb{N}$ *então a sucessão* $\dfrac{u_n}{v_n}$ *converge para* $\dfrac{a}{b}$*;*
(v) a sucessão $(u_n)^p$*, com* $p \in \mathbb{N}$*, é convergente para* a^p*;*
(vi) a sucessão $(u_n)^{1/p}$*, com* $p \in \mathbb{N}$ *é convergente para* $a^{1/p}$ *(se* p *for par,* $u_n \geq 0$*);*
(vii) se, para qualquer n*,* $u_n > 0$ *e* a *e* b *não são ambos nulos, a sucessão* $(u_n)^{v_n}$ *converge para* a^b*;*
(viii) a sucessão $|u_n|$ *converge para* $|a|$*.*

Definição

Diz-se que a sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é um **infinitamente grande positivo**, e representa-se por $u_n \to +\infty$, se

$$\forall L > 0,\ \exists p \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}: \quad n > p \Rightarrow u_n > L$$

Definição

Diz-se que a sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é um **infinitamente grande negativo**, e representa-se por $u_n \to -\infty$, se

$$\forall L > 0,\ \exists p \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}: \quad n > p \Rightarrow u_n < -L$$

Definição

Diz-se que a sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é um **infinitamente grande em módulo** se $|u_n| \to +\infty$, isto é,

$$\forall L > 0,\ \exists p \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}: \quad n > p \Rightarrow |u_n| > L$$

Teorema

Sejam $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ duas sucessões tais que a partir de certa ordem $u_n \leq v_n$. Então:

$$(u_n \to +\infty) \Rightarrow (v_n \to +\infty)$$

$$(v_n \to -\infty) \Rightarrow (u_n \to -\infty)$$

Teorema

Sejam $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *duas sucessões tais que a partir de certa ordem* $u_n \leq v_n$. *Então:*

$$(u_n \to +\infty) \Rightarrow (v_n \to +\infty)$$

$$(v_n \to -\infty) \Rightarrow (u_n \to -\infty)$$

Teorema

Sejam $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dois infinitamente grandes positivos e* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *um infinitamente grande negativo. Então:*

$$(a)\ \lim(u_n+v_n)=+\infty$$

$$(b)\ \lim(u_n.v_n)=+\infty$$

$$(c)\ \lim(u_n.w_n)=-\infty$$

$$(d)\ \lim u_n^p=+\infty,\ \forall p\in\mathbb{N}$$

$$(e)\ \lim|u_n|=\lim|v_n|=\lim|w_n|=+\infty$$

Alguns resultados úteis para o calculo de limites de sucessões.

Teorema

Se $u_n > 0$, *para qualquer* $n \in \mathbb{N}$ *e* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to b$ $(b \in \mathbb{R}$ *ou* $b = +\infty)$ *então* $\sqrt[n]{u_n} \to b$.

Teorema

Se $x \in \mathbb{R}$, *então*

$$\lim \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

Mais genericamente, se $x_n \to +\infty$ *então*

$$\lim \left(1 + \frac{x}{x_n}\right)^{x_n} = e^x.$$

Definição

Seja u_n uma sucessão e seja $i : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ uma sucessão estritamente crescente. Então a sucessão $v(n) = u(i(n))$ é designada por **subsucessão** de u_n.

Teorema

Toda a sucessão limitada possui uma subsucessão convergente.